令和７年度　一般選抜1期　１日目（２月２日実施）解答例

1

(1) $m=10, V=4.8$

(2) $\dfrac{3}{2} \leqq a$

(3) $a=9, b=0, c=0, d=2, e=1$

(4) $\sin x=1,\ \dfrac{3}{5}$

(5) $n=4$

2

(1) 不等式は $x-1 \leqq (x-2)^2 \iff x^2-5x+5 \geqq 0$ と変形できる.

一方方程式 $x^2-5x+5=0$ の解は $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから，不等式を満たす実数 x の値の範囲は，$x \leqq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$\frac{5+\sqrt{5}}{2} \leqq x$ である.

(2) 不等式は $3x^2+1 > (\,2|x|-1\,)^2 \iff |x|^2-4|x|<0 \iff |x|(\,|x|-4\,)<0$ と変形できる.

一方 $x \neq 0$ のとき，$|x|>0$ であるから，$|x|-4<0$ である．よって不等式を満たす実数 x の範囲は，$-4<x<0$，$0<x<4$ である.

(3)
(i) $x<-1$ のとき．$|\,x+1\,|-2|x| \geqq x \iff -x-1+2x \geqq x \iff -1 \geqq 0$ であるから，不等式を満たす x は存在しない.

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき．$|\,x+1\,|-2|x| \geqq x \iff x+1+2x \geqq x \iff x \geqq -\frac{1}{2}$ であるから，不等式を満たす実数 x の値の範囲は $-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ である.

(iii) $0 \leqq x$ のとき．$|\,x+1\,|-2|x| \geqq x \iff x+1-2x \geqq x \iff \frac{1}{2} \geqq x$ であるから，不等式を満たす実数 x の値の範囲は $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ である.

以上から，不等式を満たす実数 x の値の範囲は $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ である.

3

(1) 条件を満たす並び方は,「母音・母音以外・母音，母音以外」または「母音以外・母音・母音以外・母音」のいずれかである．よって，この並び方は $2\times(\,4\times4\times3\times3\,)$ 通りである．一方文字のすべての並び方は $8\times7\times6\times5$ 通りである．よって求める確率は,

$$\frac{2\times4\times4\times3\times3}{8\times7\times6\times5}=\frac{6}{35}$$

である.

(2) 3 桁の整数は (i) 112，121，211，(ii) 122，212，221，(iii) 222 である．

(i) の場合の並びになる確率は,

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$$

である．
(ii) の並びになる確率は,

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

である．
(iii) の並びになる確率は,

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

である．

以上から，得点の期待値は

$$(\,112 + 121 + 211\,) \times \frac{1}{10} + (\,122 + 212 + 221\,) \times \frac{2}{10} + 222 \times \frac{1}{10} = 177.6$$

である．

4

(1) 与式に $x = -1$ を代入すると $A = A - B + 2$ であるから，$B = 2$ を得る．与式に $x = 1$ を代入すると $B = A + B + 2$ を得るので，$A = -2$ を得．以上から $A = -2$，$B = 2$ である．

(2) (1) より

$$\int_a^x f(t)\,dt = -2x^2 + 2x + 2$$

を得るが，この両辺を x で微分すると，$f(x) = -4x + 2$ を得る．さらに $x = a$ を代入すると，$0 = -2a^2 + 2a + 2$ を得るので $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．

(3) (1) より，$y = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = -2x^2 + 2x + 2$ である．このグラフの x 軸との共有点は，$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．ここで $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおく．求める面積は,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (-2x^2+2x+2)\,dx &= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+2x\right]_\alpha^\beta \\ &= -\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha) \\ &= \frac{\beta-\alpha}{3}\left\{-2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+3(\alpha+\beta)+6\right\} \\ &= \frac{\beta-\alpha}{3}\left\{-2(\beta+\alpha)^2+2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+6\right\}\end{aligned}$$

を得る．一方 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$，$\beta-\alpha=\sqrt{5}$ である．よって

$$\int_\alpha^\beta (-2x^2+2x+2)\,dx = \frac{\sqrt{5}}{3}\left\{-2\times 1^2+2\times(-1)+3+6\right\} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

である．

5

問題 1

(1) $V_n=n^3$ より，$D_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ である．

(2) $V_1=1$ と (1) より $n^3=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+3k+1)=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$ である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 &= \frac{1}{3}\left(n^3-1-3\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1\right)=\frac{1}{3}\left(n^3-1-\frac{(n-1)n}{2}-n+1\right) \\ &= \frac{n-1}{6}\big(2(n^2+n+1)-3n-2\big)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

よって $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が示された．

問題 2

(1) $\vec{x}=\vec{a}$ とおくと $0=\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\alpha^2+\beta^2$ である．α と β は実数であるから，$\alpha=\beta=0$ である．よって $\vec{a}$ は零ベクトルである．

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である．よって，任意のベクトル $\vec{x}$ に対して

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=\Big((\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{b}\Big)\cdot\vec{a}=(\vec{x}\cdot\vec{a})\times|\vec{a}|^2+(\vec{x}\cdot\vec{b})\times(\vec{b}\cdot\vec{a})=(\vec{x}\cdot\vec{a})|\vec{a}|^2$$

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=\Big((\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{b}\Big)\cdot\vec{b}=(\vec{x}\cdot\vec{a})\times(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{x}\cdot\vec{b})\times|\vec{b}|^2=(\vec{x}\cdot\vec{b})|\vec{b}|^2$$

である．

ここで，$\vec{x}\cdot\vec{a}=(\vec{x}\cdot\vec{a})|\vec{a}|^2$ において，$\vec{x}=\vec{a}$ とおくと $|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\times|\vec{a}|^2$ を得る．$\vec{a}$ は零ベクトルではないので $|\vec{a}|=1$ を得る．
さらに，$\vec{x}\cdot\vec{b}=(\vec{x}\cdot\vec{b})|\vec{b}|^2$ において，$\vec{x}=\vec{b}$ とおくと $|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2\times|\vec{b}|^2$ を得る．$\vec{b}$ は零ベクトルではないので $|\vec{b}|=1$ を得る．
以上で証明された．