令和７年度　一般選抜1期　２日目（２月３日実施）　解答例

1

(1) $8(1+\sqrt{2})$

(2) $a > 10$

(3) $52 - 20\sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{35}}{2}$

(4) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$,　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

(5) $a = \dfrac{11}{4}$,　$b = 9$

2

(1) 余弦定理より $6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \mathrm{B}$ より $\cos \mathrm{B} = \frac{1}{8}$ を得る．

(2) 余弦定理より

$$\cos \mathrm{A} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{9}{16} > 0$$

$$\cos \mathrm{B} = \frac{1}{8} > 0$$

$$\cos \mathrm{C} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4} > 0$$

を得る．すべての余弦の値が正であるから，すべての角は大きさは，90° より小さい。
(3) $\sin \mathrm{B} > 0$ より $\sin \mathrm{B} = \sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{B}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ である．よって正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{CA}}{\sin \mathrm{B}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

を得る．

3

(1) 重解を持つのは，判別式 $D = a^2 - 4b = 0$ のときである．a と b は正であるから，$a = 2\sqrt{b}$ である．さて a は自然数であるから，$b = 1, 4$ 以外はない．$b = 1$ のとき は $a = 2$，$b = 4$ のときは，$a = 4$ である．よって重解となるのは 2 通りある．a と b の組み合わせは 16 通りであるから，重解となる確率は

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

である．

(2) グラフが x 軸と共有点を持つので，$D \geqq 0$ である．さらに共有点が整数となるのは，D は自然数の 2 乗でなければならない。これを満たす $(a,\, b)$ は,

$$(a,\, b) = (2,\, 1),\, (3,\, 2),\, (4,\, 3),\, (4,\, 4)$$

である．それぞれの方程式を解くと，

$(a,\, b) = (2,\, 1)$ のときは　$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$ より解は $x = -1$ である．

$(a,\, b) = (3,\, 2)$ のときは　$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) = 0$ より解は $x = -1,\, -2$ である．

$(a,\, b) = (4,\, 3)$ のときは　$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1) = 0$ より解は $x = -1,\, -3$ である．

$(a,\, b) = (4,\, 4)$ のときは　$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ より解は $x = -2$ である．

よって，求める確率は，$\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ である．

4

(1) 4^n が 13 桁の整数あるから，$10^{12} \leqq 4^n < 10^{13}$ を満たす．$\log_{10} 2 = 0.3010$ より $\log_{10} 4^n = 2n \log_{10} 2 = 0.602n$ である．よって $12 \leqq 0.602n < 13$ より $19.93 \leqq n < 21.59$ であるから $n = 20$，21 を得る．

(2) 両辺に $(x-1)(x+1)^2$ をかけると

$$7x^2 + 7x + 6 = a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)$$

を得る．この両辺に

- $x = 1$ を代入すると $20 = 4a$ を得るので $a = 5$ である．
- $x = -1$ を代入すると $6 = -2c$ を得るので $c = -3$ である．
- $x = 0$ を代入すると $6 = a - b - c$ を得るが，$a = 5$，$c = -3$ なので $b = 2$ である．

最後に $a = 5$，$b = 2$，$c = -3$ を与式の右辺に代入し，まとめると右辺を得る．よって恒等式を得る．

(3) 加法定理より

$$A\cos(\theta + \alpha) = A\cos\theta\cos\alpha - A\sin\theta\sin\alpha$$
$$A\sin(\theta + \beta) = A\cos\theta\sin\beta + A\sin\theta\cos\beta$$

よって，それぞれ $4\cos\theta - 5\sin\theta$ に等しいので，$\cos\alpha = \frac{4}{A}$，$\sin\alpha = \frac{5}{A}$，$\cos\beta = -\frac{5}{A}$，$\sin\beta = \frac{4}{A}$ である．よって

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = \frac{41}{A^2} \quad \Rightarrow \quad A^2 = 41$$

であるから，$A > 0$ より $A = \sqrt{41}$ を得る．さらに加法定理より

$$\cos(\,\alpha - \beta\,) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{A} \times \left(-\frac{5}{A}\right) + \frac{5}{A} \times \frac{4}{A} = 0$$

$$\sin(\,\alpha-\beta\,)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{5}{A}\times\left(-\frac{5}{A}\right)-\frac{5}{A}\times\frac{4}{A}=-\frac{41}{A^2}=-1$$

を得る．以上から $A=\sqrt{41}$，$\cos(\,\alpha-\beta\,)=0$，$\sin(\,\alpha-\beta\,)=-1$ である．

5

問題 1

(1) 漸化式より

$$\begin{aligned} D_n &= a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}+3(n+1)-2-(\,2a_n+3n-2\,) \\ &= 2(\,a_{n+1}-a_n\,)+3=2D_{n-1}+3 \end{aligned}$$

よって，$D_n=2D_{n-1}+3$ なので，$D_{n+1}+3=2\,(\,D_n+3\,)$ を満たす．よって D_n+3 は初項 $D_1+3=a_2-a_1+3=2a_1+3\times1-2-1+3=4$，公比 2 の等比数列である．よって $D_n+3=4\cdot2^{n-1}$ である．

(2) 数列 $\{D_n\}$ は 数列 $\{a_n\}$ の階差数列なので $n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}D_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(4\cdot2^{k-1}-3\right)=14\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-3(n-1)+=2^{n+1}-3n$$

即ち $a_n=2^{n+1}-3n$ を得る．なお $n=1$ のとき，左辺 $=2^2-3=1$ より，$n=1$ でも成立する．

問題 2

(1) $\overrightarrow{e}=(a,\,b)$ とおく．$|\,\overrightarrow{e}\,|=1$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e}=0$ より，$a^2+b^2=1$，$2a+3b=0$ であるから，$a=\pm\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，b$=\mp\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$（複号同順）を得る．

(2) $\overrightarrow{p}$ が満たすベクトル方程式は，t を任意の実数とし複号同順で

$$\overrightarrow{p}=(3,\,-1)+t\overrightarrow{e}=(3,\,-1)+t\left(\pm\tfrac{3\sqrt{13}}{13},\,\mp\tfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)=(3,\,-1)\pm\tfrac{\sqrt{13}}{13}t(3,\,-2)$$

である．よって，$s=\pm\frac{\sqrt{13}}{13}t$ とおくと $\overrightarrow{p}=(3s+3,\,-2s-1)$ である．よって，$X=3s+3$，$Y=-2s-1$ を得る．ただし s は任意の実数である．